Een algemene procedure voor het berekenen van de Wald-toets zonder dat de restrikties expliciet geformuleerd zijn

Kodde, D.A.

1982

Vrije Universiteit
A m s t e r d a m
Ekonomische Fakulteit

EEN ALGEMENE PROCEDURE VOOR HET BEREKENEN VAN DE WALD-TOETS ZONDER DAT DE RESTRIKTIES EXPLICIET GEFORMULEERD ZIJN: MET ENKELE TOEPASSINGEN

D.A. Kodde

Researchmemorandum 1982-25 oktober'82

Een algemene procedure voor het berekenen van de Wald-toets zonder dat de restrikties expliciet geformuleerd zijn: met enkele toepassingen.

D.A. Kodde*

1. Inleiding

De laatste jaren wordt door ekonometristen veel aandacht besteed aan specifikatie-analyse. Ze zijn vooral geïnteresseerd of de tijdens de modelbouw geformuleerde veronderstellingen en hypothesen al dan niet verworpen moeten worden. Bij de specifikatie-analyse begint men veelal met een zeer algemeen model, waarvan men veronderstelt dat het ruim genoeg is om het 'echte' datagenererende proces te omvatten. Door uitgaande van het algemene model steeds verder restrikties aan het model op te leggen, probeert men het 'echte' proces te vinden. Omdat opeenvolgende modellen in elkaar genest zijn kan men voor het uitvoeren van deze toetsen kiezen uit de Wald-toets, Likelihood ratio-toets en Lagrange-multipliertoets, welke lokaal asymptotisch equivalent zijn, zie Silvey (1970). De Lagrange-multipliertoets wordt vaak gebruikt voor het toetsen op misspecifikatie, een term geïntroduceerd door Mizon (1977), en in situaties waar schattingen van de parameters onder de nulhypothese relatief eenvoudig ten opzichte van die onder de alternatieve hypothese te verkrijgen zijn.

In dit artikel zullen we ons voornamelijk koncentreren op situaties, waarin de parameters van het model onder de alternatieve hypothese gemakkelijk te schatten zijn. Toetsen met behulp van de Likelihood ratio- of Wald-toets ligt dan voor de hand. Voor toepassing van de Likelihood ratio-toets moeten 'maximum likelihood'-schattingen onder beide hypotheses, H_0 en H_1, worden berekend. Vaak moet dan voor de parameters onder H_0 een niet-lineaire schattingsmethode gebruikt worden. Voor toepassing van de Waldtoets daarentegen zijn alleen (asymptotisch) normaal verdeelde schattingen van de parameters onder de alternatieve hypothese nodig. Beide toetsen hebben hun voor- en nadelen en daarom is de keuze afhankelijk van eenvoud van toepassing, rekenkundige mogelijkheden en kosten, en kleine

*) Economisch Instituut, Katholieke Universiteit, Thomas van Aquinostraat 6, 6525 EM Nijmegen.
De auteur dankt Hans van Alphen en Frans van der Reep voor hun opmerkingen op een eerdere versie van dit stuk. Speciale dank gaat uit naar Franz Palm, die stimuleerde tot het schrijven van dit stuk en die door zijn kommentaar de kwaliteit heeft kunnen verbeteren.

steekproefeigenschappen, waarvan veelal nog weinig bekend is.

Voor het gebruik van de Wald-toets gelooft men dat het noodzakelijk is om de restrikties expliciet te bepalen, hetgeen veelal tijdrovend en lastig is en omdat er geen algemene procedure aanwezig is, moet ieder probleem op zich worden behandeld. In dit artikel zullen we echter een algemene procedure geven, welke gebaseerd is op de relaties tussen de parameters onder H_0 en H_1. We zullen laten zien hoe deze procedure gebruikt kan worden om de restrikties expliciet af te leiden of om de Wald-toets direkt te berekenen door de restrikties slechts impliciet te gebruiken. In paragraaf 2 geven we enkele elementaire resultaten en introduceren een deel van de notatie, die in de volgende paragrafen uitgebreid zal worden. De algemene procedure om de Wald-toets te berekenen zullen we in paragraaf drie beschrijven, daarnaast zullen we ook aandacht besteden aan de niet unieke representatie van de restrikties en de daaruit voortvloeiende gevolgen voor de waarde van de Wald-toets. In paragraaf 4 zullen we drie toepassingen van de procedure bespreken, die het in de paragrafen 2 en 3 gepresenteerde materiaal moeten illustreren.

Het eerste voorbeeld zal laten zien hoe Byron's toets op overidentificerende restrikties in een lineair simultaan model behandeld kan worden. Vervolgens zullen we laten zien hoe onze procedure gebruikt kan worden om de 'Rational Expectation Hypothesis' in een herleide vorm context te toetsen. Hierbij sluiten we aan bij de studie van Hoffman en Schmidt (1981), maar onze formule is in zeker opzicht algemener.

Tenslotte zullen we een toepassing voor het toetsen op de aanwezigheid van 'common factors' in een dynamische vergelijking bespreken. Een algoritme voor toetsing van dit soort restrikties wordt gegeven in Sargan (1980a). Speciaal in dit laatste voorbeeld zullen we ingaan op de niet unieke representatie van de restrikties, die resulteren uit het toetsen van H_0 tegen H_1. De gegeven voorbeelden om de procedures te illustreren kunnen eenvoudig met andere voorbeelden aangevuld worden. We menen dat de drie voorbeelden het meer theoretische materiaal in paragraaf 3 goed dekken en illustreren. De belangrijkste konklusies uit dit artikel zullen we samenvatten in paragraaf 5.

2. Enige notatie en elementaire resultaten

Het toetsen van hypothesen begint met het opstellen van een nul- en een alternatieve hypothese, welke we respektievelijk met H_0 en H_1 aangeven. De korresponderende onderliggende modellen kunnen respektievelijk door β en Θ geparametriseerd worden, waarbij β een m-vektor voorstelt en Θ een vektor van lengte n is. Omdat het model onder de nulhypothese genest is in dat onder de alternatieve hypothese, is het aantal parameters in β kleiner dan het aantal in Θ, dat wil zeggen $m < n$. Men zegt ook wel dat de parameters Θ gerestrikteerd zijn onder de nulhypothese. Het model onder H_0 is genest in dat onder H_1 en daarom kan β geïdentificeerd worden uit Θ. Vanwege de nestingsstruktuur kunnen de relaties tussen β en Θ onder H_0 algemeen geschreven worden als:

$$f(\beta, \Theta) = 0, \tag{2.1}$$

waarbij we aannemen dat f een kontinu differentieerbare afbeelding van de $m+n$ dimensionale ruimte in de $m+r$ dimensionale ruimte is. Deze $m+r$ is gelijk aan het aantal impliciete relaties in vergelijking (2.1). In paragraaf 3 zullen we laten zien hoe 2.1 gebruikt kan worden om de restrikties $h(\Theta) = 0$ af te leiden; hierbij is $h(\Theta)$ een systeem van r impliciete funkties met als argument de parameters onder H_1. Onder H_1 zijn de genoemde restrikties niet van toepassing, $h(\Theta) \neq 0$. We kunnen de Wald-toets (zie Wald (1943)), berekenen, indien we een (asymptotisch) normaal verdeelde schatter $\hat{\Theta}$ van Θ hebben, zodanig dat $\operatorname{plim} \sqrt{T}(\hat{\Theta} - \Theta) \overset{d}{\sim} N(0, \Omega_\Theta)$, waarbij de variantie-covariantiematrix Ω_Θ konsistent geschat wordt door $\hat{\Omega}_\Theta$.

De Wald-toets is gebaseerd op een eerste orde Taylor-benadering rond $\hat{\Theta}$. De hogere orde termen worden verondersteld verwaarloosbaar te zijn. De Taylor-benadering wordt gegeven door:

$$0 = h(\Theta) \approx h(\hat{\Theta}) + \left.\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} (\Theta - \hat{\Theta}) \quad , \tag{2.2}$$

en de bijbehorende waarde van de Wald-toets, w, is :

$$w = T h(\hat{\Theta})' \left. \left[\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'} \hat{\Omega}_\Theta \frac{\partial h(\Theta)'}{\partial \Theta} \right]^{-1} \right|_{\Theta=\hat{\Theta}} h(\hat{\Theta}) \quad , \tag{2.3}$$

w is asymptotisch χ^2-verdeeld met r vrijheidsgraden als rang $\left(\left.\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} \right) = r$ en $h(\Theta)$ kontinu differentieerbaar is in Θ.

De restterm van de Taylor-benadering, die voor gelijkheid in (2.2) zorgt, is van orde $\frac{1}{T}$, $0(\frac{1}{T})$, zodat deze restterm asymptotisch niet van invloed is op de uitkomst van w in (2.3). Een ander bekend feit is dat de waarde van de Wald-toets niet verandert, ook niet in kleine steekproeven, als de restrikties $h(\Theta) = 0$ voorvermenigvuldigd worden met een konstante niet-singuliere $r \times r$ matrix. We zullen later zien dat dit resultaat ook geldig is voor een meer algemene klasse van niet-singuliere transformaties, afgezien van enkele invloeden die ontstaan door de restterm van de Taylor-benadering. We kiezen een willekeurige kontinu differentieerbare transformatie $g: R^r \to R^r$ van $h(\Theta)$ met $g(0) = 0$, die niet-singulier is. Als we de waarde van de Wald-toets afleiden voor de restrikties $g(h(\Theta)) = 0$, dan krijgen we eerst als Taylor-benadering met gebruikmaking van de kettingregel voor differentiëren:

$$0 = g(h(\Theta)) \approx g(h(\hat{\Theta})) + \frac{\partial g(h(\Theta))}{\partial h(\Theta)'} \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\bigg|_{\Theta=\hat{\Theta}} (\Theta-\hat{\Theta}) \quad , \qquad (2.4)$$

waaruit we de Wald-toets verkrijgen als:

$$w = Tg(h(\hat{\Theta}))' \left[\frac{\partial g(h(\Theta))'}{\partial h(\Theta)'}\right]^{-1} \left[\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'} \hat{\Omega}_\Theta \frac{\partial h(\Theta)'}{\partial \Theta'}\right]^{-1} \left[\frac{\partial g(h(\Theta))}{\partial h(\Theta)'}\right]^{-1} \Bigg|_{\Theta=\hat{\Theta}} g(h(\hat{\Theta})) \; . \qquad (2.5)$$

Benaderen we g met een eerste orde Taylorbenadering rond $h(\hat{\Theta})$, dan krijgen we onder H_0 :

$$0 = g(h(\Theta)) \approx g(h(\hat{\Theta})) + \frac{\partial g(h(\Theta))}{\partial h(\Theta)'}\bigg|_{\Theta=\hat{\Theta}} (-h(\hat{\Theta})) \quad , \qquad (2.6)$$

ofwel:

$$h(\hat{\Theta}) \approx \left[\frac{\partial g(h(\Theta))}{\partial h(\Theta)'}\right]^{-1}\Bigg|_{\Theta=\hat{\Theta}} g(h(\hat{\Theta})) \quad . \qquad (2.7)$$

Substitueren we de rechterkant van (2.7) in (2.5), dan krijgen we een vorm, die op invloed van de restterm in (2.6) na, equivalent is aan de waarde van de Wald-toets in (2.3). Hiermee is het gestelde aangetoond. Ook de orde van de restterm in (2.4) is $0(\frac{1}{T})$, zodat het verschil tussen de berekening van w in (2.3) en (2.5) ook van $0(\frac{1}{T})$ is. We kunnen ook laten zien dat de waarde van de Wald-toets zelfs asymptotisch equivalent is onder een nog algemener klasse van transformaties van de restrikties. De klasse die we beschouwen wordt gegeven door $g(h(\Theta), \Theta)$, waarbij g een kontinu differentieerbare vektorfunktie van orde r is en $g(0,\Theta) = 0$.

Om dit te laten zien moeten we aantonen dat plim $(w_g - w) = 0$, met w_g de waarde van de Wald-toets voor het toetsen op de restrikties $g(h(\Theta), \Theta) = 0$ en w de grootheid uit vergelijking (2.3) . w_g wordt gegeven door:

$$w_g = T\ g(h(\hat{\Theta}), \hat{\Theta})'[P\ \hat{\Omega}_\Theta P']^{-1}\ g(h(\hat{\Theta}), \hat{\Theta}) \quad . \tag{2.8}$$

In deze formule staat P voor de matrix partiële afgeleiden van g met betrekking tot Θ en is gelijk aan:

$$P = \frac{\partial g(y,\Theta)}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \Theta'} + \frac{\partial g(y,\Theta)}{\partial \Theta'} \quad . \tag{2.9}$$

Hierbij hebben we ter vereenvoudiging van de notatie ingevoerd dat $y = h(\Theta)$. Resultaat (2.9) is met behulp van de kettingregel voor differentiëren verkregen. Analoog aan formule (2.2) vinden we met weglating van de restterm, welke asymptotisch te verwaarlozen is,

$$0 = g(h(\Theta),\Theta) \approx g(h(\hat{\Theta}),\hat{\Theta}) + P_{\Theta=\hat{\Theta}}(\Theta-\hat{\Theta}) \quad . \tag{2.10}$$

Als we vergelijking (2.10) voorvermenigvuldigen met $\left[\frac{\partial g(y,\Theta)}{\partial y'}\right]^{-1}\Big|_{\Theta=\hat{\Theta}}$, dan verandert de waarde van de Wald-toets niet, zoals we eerder opgemerkt hebben.

Om aan te tonen dat onder de nulhypothese geldt dat plim $(w_g - w) = 0$, is het voldoende om te laten zien dat

$$\text{plim} \left[\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'} - \left[\frac{\partial g(y,\Theta)}{\partial y'}\right]^{-1} P\right]_{\Theta=\hat{\Theta}} = 0 \quad , \tag{2.12}$$

omdat asymptotisch onder H_0 geldt dat:

$$\sqrt{T}\ h(\hat{\Theta}) = \sqrt{T}\ \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\Big|_{\Theta=\hat{\Theta}}(\hat{\Theta}-\Theta) \quad , \quad \text{en}$$

$$\sqrt{T}\ g(h(\hat{\Theta}),\hat{\Theta}) = \sqrt{T}\ P_{\Theta=\hat{\Theta}}(\hat{\Theta}-\Theta) \quad .$$

De tweede term tussen vierkante haken in (2.12) geëvalueerd in het punt $\Theta = \hat{\Theta}$, wordt gegeven door:

$$\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'} + \left[\frac{\partial g(y,\Theta)}{\partial y'}\right]^{-1} \frac{\partial g(y,\Theta)}{\partial \Theta'} \quad .$$

Na substitutie van deze term in (2.12) is duidelijk dat alleen aangetoond moet worden dat $\operatorname{plim} \left.\frac{\partial g(y,\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} = 0$. Hetgeen volgt uit:

$$\operatorname{plim} \left.\frac{\partial (g(y,\Theta))}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} = \left.\frac{\partial g(\operatorname{plim} y,\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta} = \left.\frac{\partial g(0,\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta} =$$

$$= \left.\frac{\partial\, 0}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta} = 0 \; . \qquad \text{Q.E.D.}$$

De asymptotische equivalentie van w_g en w onder H_0 kan gebruikt worden om de invloed van transformaties van de restrikties op de toetswaarde te onderzoeken. We hebben echter alleen een voldoende voorwaarde voor asymptotische equivalentie afgeleid.

Een andere interessante toepassing van onze procedure vinden we op het gebied van sequentiele toetsing. We verwijzen de lezer naar paragraaf 3.2 van Anderson (1971), waar het sequentiele toetsen in het kader van multiple regressie wordt besproken en naar Sargan (1980a), die toepassing voor de Wald-toets bespreekt.
In het volgende deel van deze paragraaf zullen we laten zien dat de Wald-toets geschreven kan worden als de som van twee χ^2-verdeelde kwadratische vormen, als de verzameling al aanwezige restrikties met een extra verzameling daarvan onafhankelijke restrikties wordt uitgebreid. We veronderstellen dat de twee verzamelingen restrikties, $h_1(\Theta) = 0$ en $h_2(\Theta) = 0$, respektievelijk uit r_1 en r_2 impliciete funkties zijn opgebouwd. De Wald-toets op deze $r_1 + r_2$ restrikties kan geschreven worden als:

$$w_{r_1+r_2} = T\,(x_1' \;\vdots\; x_2') \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}' & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{pmatrix} \; , \qquad (2.13)$$

met $x' = (x_1' \;\vdots\; x_2') = (h_1(\hat{\Theta}) \;\vdots\; h_2(\hat{\Theta}))$ en de variantie-covariantie matrix van x ,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}' & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\Theta)}{\partial \Theta'} \hat{\Omega}_\Theta \frac{\partial h_1(\Theta)'}{\partial \Theta'} & \frac{\partial h_1(\Theta)}{\partial \Theta'} \hat{\Omega}_\Theta \frac{\partial h_2(\Theta)'}{\partial \Theta'} \\ \frac{\partial h_2(\Theta)}{\partial \Theta'} \hat{\Omega}_\Theta \frac{\partial h_1(\Theta)'}{\partial \Theta'} & \frac{\partial h_2(\Theta)}{\partial \Theta'} \hat{\Omega}_\Theta \frac{\partial h_2(\Theta)'}{\partial \Theta'} \end{bmatrix}_{\Theta=\hat{\Theta}} .$$

Vergelijking 2.13 kan met gebruikmaking van de regel voor berekening van de inverse van gepartitioneerde matrices ook geschreven worden als:

$$w_{r_1+r_2} = T\,(x_1' \vdots x_2') \begin{bmatrix} I - \Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & (\Sigma_{22} - \Sigma_{12}'\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}')^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Sigma_{12}'\Sigma_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{pmatrix}$$

en het is duidelijk dat $w_{r_1+r_2} = w_{r_1} + w_{r_2}$, waarin

$$w_{r_1} = T\,x_1'\,\Sigma_{11}^{-1}\,x_1 \tag{2.14}$$

$$w_{r_2} = T\,(x_2 - \Sigma_{12}'\Sigma_{11}^{-1}x_1)'\,(\Sigma_{22} - \Sigma_{12}'\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})^{-1}(x_2 - \Sigma_{12}'\Sigma_{11}^{-1}x_1),$$

hetgeen het gewenste resultaat geeft omdat $w_{r_1+r_2}$ en w_{r_1} asymptotisch χ^2-verdeeld zijn met respectievelijk r_1+r_2 en r_1 vrijheidsgraden. Het verschil tussen $w_{r_1+r_2}$ en w_{r_1}, w_{r_2}, is χ^2-verdeeld met r_2 vrijheidsgraden, omdat x_2 conditioneel op $x_1 \overset{a}{=} N(\Sigma_{12}'\Sigma_{11}^{-1}x_1, \Sigma_{22}-\Sigma_{12}'\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})$ verdeeld is. Voor het sequentieel toetsen is het dan ook voldoende om naar de toename in waarde van de toetsingsgrootheid te kijken. De Wald-toets is uitermate bruikbaar in sequentiële toetsingstoepassingen indien de restrikties $h(\Theta) = 0$ eenvoudig zijn te verkrijgen of als alternatief indien $h(\hat{\Theta})$ en $\left.\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}}$ gemakkelijk zijn te bepalen.

In paragraaf 3 zullen we aangeven hoe deze twee grootheden eenvoudig kunnen worden verkregen.

3. Impliciete relaties en daaruit voortvloeiende berekening van de Wald-toets

Zoals in paragraaf 2 vergelijking 2.2 aangegeven is, kunnen de relaties tussen β en Θ de parameters van de modellen onder H_0 en H_1 geschreven worden als $f(\beta,\Theta) = 0$, welke we zullen gebruiken om de restrikties en de waarde van de Wald-toets te bepalen. Bij onze analyse zullen we gebruik maken van de impliciete funktie-stelling, welke onder andere in Rudin (1976) gegeven wordt. Het model onder H_0 is genest in het model onder H_1 hetgeen impliceert dat er zeker een deelverandering van m impliciete funkties bestaat waarvoor bij een gegeven $\hat{\Theta}$ een oplossing voor β kan worden berekend, die aan deze m impliciete funkties voldoet. Deze deelverzameling van m impliciete funkties geven we aan als $f_1(\beta,\Theta) = 0$. De resterende r funkties zijn bevat in $f_2(\beta,\Theta) = 0$. De oplossing van $f_1(\beta,\Theta) = 0$ bij gegeven $\hat{\Theta}$ geven we aan met $\hat{\beta}_1$ en deze voldoet aan $f_1(\hat{\beta}_1,\hat{\Theta}) = 0$.

In deze paragraaf zullen we een drietal zaken bespreken. Ten eerste expliciete afleiding van de restrikties met behulp van een keuze voor $f_1(\beta,\Theta) = 0$. Vervolgens zullen we laten zien hoe afleiding van $h(\hat{\Theta})$ en $\left.\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}}$ op impliciete wijze kan worden gerealiseerd met behulp van de gekozen deelverzamelingen van de onder H_0 geldig zijnde impliciete funkties. Ten derde onderzoeken we of een andere keuze van de m impliciete funkties uit alle $m+r$ funkties tot een andere waarde van de Wald-toets leidt.

3.1 Expliciete afleiding van de restrikties

We kiezen $f_1(\beta,\Theta) = 0$ zodanig dat we de oplossing β , als funktie van Θ kunnen verkrijgen. Deze analytische oplossing, voor iedere waarde van Θ, geven we aan met $\beta_1 = f_1^*(\Theta)$, waarbij f_1^* kontinu differentieerbaar is. De restrikties, die onder de nulhypothese als impliciete funkties geformuleerd zijn, worden dan gegeven door $h(\Theta) = f_2(f_1^*(\Theta),\Theta) = 0$. Hetgeen weer een kontinu differentieerbare vektorfunktie in Θ oplevert, zoals dat voor een korrekte toepassing van de Wald-toets is vereist. Ook al is dit een zeer eenvoudige methode, toch is ze handig in het afleiden van de restrikties, zoals in het tweede voorbeeld van paragraaf 4 het toetsen van de 'Rational expectation hypothesis' in een herleide vorm model zal worden geïllustreerd.

3.2 Impliciete afleiding van de restrikties voor de Wald-toets

Veronderstel dat we geen expliciete formulering van de restrikties kunnen vinden of niet geïnteresseerd zijn in deze formulering. Voor het toetsen van de restrikties, $h(\Theta) = 0$, waar aan voldaan moet zijn als de nulhypothese juist is, moeten alleen de grootheden $h(\hat{\Theta})$ en $\left.\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}}$ berekend worden.

We zullen laten zien hoe deze grootheden berekend kunnen worden voor een willekeurig stelsel van m+r onder de nulhypothese impliciete funkties. We zullen beginnen met de afleiding van $h(\hat{\Theta})$. Analoog aan de situatie in subparagraaf 3.1 verdelen we $f(\beta,\Theta)$ in $f_1(\beta,\Theta)$ en $f_2(\beta,\Theta)$. Uit $f_1(\beta,\hat{\Theta}) = 0$ bepalen we een punt $\hat{\beta}_1$ zodanig dat $f_1(\hat{\beta}_1,\hat{\Theta}) = 0$. Omdat het model onder H_0 in het model onder H_1 genest is, zal er altijd een deelverzameling f_1 van f zijn zodanig dat een oplossing $\hat{\beta}_1$ voor die deelverzameling f_1 is te vinden. We berekenen de oplossing $\hat{\beta}_1$ voor een gegeven waarde van $\hat{\Theta}$, die we kennen omdat deze in een eerder stadium is geschat. De waarde van de restrikties in het punt $\hat{\Theta}$ wordt gegeven door:

$$h(\hat{\Theta}) = f_2(\hat{\beta}_1,\hat{\Theta}) \quad . \tag{3.1}$$

Om een oplossing $\hat{\beta}_1$ van een stelsel van niet noodzakelijke lineaire funkties te vinden zodanig dat $f_1(\hat{\beta}_1,\Theta) = 0$, kunnen verscheidene algoritmen worden toegepast. Een oplossing kan bijvoorbeeld gevonden worden door het volgende minimeringsprobleem op te lossen

$$\min_{\beta_1} f_1(\beta_1,\hat{\Theta})' \, f_1(\beta_1,\hat{\Theta}) \tag{3.2}$$

waarbij de te minimeren funktie de waarde nul aan moet nemen.

Vervolgens zullen we ons bezighouden met de bepaling van $\left.\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}}$.
We nemen aan dat $\frac{\partial f_1(\beta,\Theta)}{\partial \beta'}$ inverteerbaar is in het punt $(\hat{\beta}_1,\hat{\Theta})$.
Indien dit niet het geval is dan kiezen we een andere deelverzameling f_1 van f waarvoor er een oplossing van het minimeringsprobleem 3.2 bestaat, die wel aan de inverteerbaarheidvoorwaarde voldoet. Dan hangt als een resultaat van de impliciete funktiestelling de oplossing β_1, in een verzameling die $(\hat{\beta}_1,\hat{\Theta})$ bevat, kontinu differentieerbaar af van Θ. De eerste afgeleide van de oplossing, die we aangeven met $\beta_1(\Theta)$, met betrekking tot Θ wordt gegeven door:

$$\frac{\partial \beta_1(\Theta)}{\partial \Theta'} = -\left(\frac{\partial f_1(\beta,\Theta)}{\partial \beta'}\right)^{-1} \left.\frac{\partial f_1(\beta,\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{(\beta,\Theta)=(\hat{\beta}_1,\hat{\Theta})} \tag{3.3}$$

De partiële afgeleide van de restrikties met betrekking tot Θ geëvalueerd in $\hat{\Theta}$ wordt dan gegeven door:

$$\left.\frac{\partial h(\Theta)}{\partial\Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} = \left.\frac{\partial\ f_2(\ \beta_1(\Theta),\Theta)}{\partial\Theta'}\right|_{(\beta_1,\Theta)=(\hat{\beta}_1,\hat{\Theta})} \tag{3.4}$$

Om de afgeleide in 3.4 te bepalen definiëren we $y(\Theta) = \begin{pmatrix}\beta_1(\Theta)\\ \Theta\end{pmatrix}$
en merken op dat de rechterkant van 3.4 equivalent is aan

$$\frac{\partial\ f_2(y(\Theta))}{\partial\ y(\Theta)'}\ \frac{\partial\ y\ (\Theta)}{\partial\Theta'}\ , \tag{3.5}$$

waar de eerste term in 3.5 eenvoudig verkregen kan worden omdat $f_2(y(\Theta))$ bekend is. De tweede term is voor een deel samengesteld uit de afgeleide matrix in 3.3. Na substitutie in 3.5 krijgen we:

$$\left.\frac{\partial\ h\ (\Theta)}{\partial\Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} = \left(\frac{\partial\ f_2(\beta,\Theta)}{\partial\beta'}\ \vdots\ \frac{\partial\ f_2(\beta,\Theta)}{\partial\Theta}\right)\left.\begin{pmatrix}-\ \dfrac{\partial\ f_1(\beta,\Theta)}{\partial\beta'}^{-1}\ \dfrac{\partial\ f_1(\beta,\Theta)}{\partial\Theta'}\\ I_n\end{pmatrix}\right|_{\substack{(\beta,\Theta)=\\(\hat{\beta}_1,\Theta)}}$$

$$= \left.\left[-\ \frac{\partial\ f_2(\beta,\Theta)}{\partial\beta'}\left(\frac{\partial\ f_1(\beta,\Theta)}{\partial\beta'}\right)^{-1}\ \frac{\partial\ f_1(\beta,\Theta)}{\partial\Theta'} + \frac{\partial\ f_2(\beta,\Theta)}{\partial\Theta'}\right]\right|_{\substack{(\beta,\Theta)=\\(\hat{\beta}_1,\hat{\Theta})}} \ . \tag{3.6}$$

De Wald-toets kan berekend worden met behulp van de termen 3.1 en 3.6. De gegeven formules zijn toepasbaar op alle problemen voor het toetsen van geneste hypothesen. Het komt echter vaak voor dat de impliciete funkties een speciale struktuur hebben waardoor eenvoudiger formules voor 3.1 en 3.6 kunnen worden afgeleid. Veelal kunnen de impliciete funkties geschreven worden als $f(\beta)\ -\Theta = 0$, bijvoorbeeld bij het toetsen op de aanwezigheid van een 'common factor' zie Sargan (1977, 1980a), polynoom verdeelde vertragingen, Almon (1966) en Sargan (1980b) en Rationele verwachtingen, hiervoor verwijzen we naar Hoffman en Schmidt (1981) en Revankar (1980). De hier genoemde mogelijkheden zijn er slechts enkele uit een zeer uitgebreide verzameling. Bij deze opsomming hebben we dan ook niet naar volledigheid gestreefd, maar ons beperkt tot enkele in empirische studies veel voorkomende toetsingsproblemen.

De vereenvoudigde formules worden afgeleid door gebruik te maken van de seperabiliteit van de impliciete funkties,

$$f(\beta) - \Theta = 0 , \tag{3.7}$$

Ook nu partitioneren we $f(\beta) - \Theta = 0$ in $f_1(\beta) - \Theta_1 = 0$ en $f_2(\beta) - \Theta_2 = 0$ en bepalen $\hat{\beta}_1$ zodanig dat $f_1(\hat{\beta}_1) - \hat{\Theta}_1 = 0$. Analoog aan onze vorige afleiding krijgen we:

$$h(\hat{\Theta}) = f_2(\hat{\beta}_1) - \hat{\Theta}_2 \quad \text{en} \tag{3.8}$$

$$\left.\frac{\partial\, h(\Theta)}{\partial\Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} = \left[\frac{\partial\, f_2(\beta)}{\partial\beta'} \quad \frac{\partial\, f_1(\beta)}{\partial\beta'}^{-1} \;\vdots\; -I_r\right]_{\beta=\hat{\beta}_1} , \tag{3.9}$$

een resultaat dat we ook op basis van de inverse funktiestelling af kunnen leiden. We verwijzen weer naar Rudin (1976). Bij een gegeven keuze van f_1 en f_2 kunnen we 3.1 en 3.6 of 3.8 en 3.9 bepalen om de Wald-toets te berekenen. We moeten ons echter afvragen of door een andere keuze van f_1 en f_2 de waarde van de Wald-toets beïnvloed wordt. Dit onderwerp zullen er verder in subparagraaf 3.3 bespreken.

3.3 De keuze van f_1 en f_2 en de waarde van de Wald-toets

In deze paragraaf willen we nagaan of de waarde van de Wald-toets beïnvloed wordt indien we door een andere keuze van f_1 en f_2 de restrikties bepalen. Indien we voor twee verschillende keuzes van f_1 en f_2 de restrikties expliciet af kunnen leiden, dan zal de waarde van de Wald-toets zelfs niet in kleine steekproeven worden beïnvloed als er een niet singuliere transformatie van de restrikties bestaat, waravoor geldt dat $y(0) = 0$, zodanig dat de restrikties na transformatie overgaan in de restrikties verkregen door een andere keuze van f_1 en f_2 . Het hier beweerde is formeel aangetoond in paragraaf 2. De waarde van de Wald-toets is asymptotisch equivalent indien er een transformatie $g(h(\Theta),\Theta)$, met $g(0,\Theta) = 0$, bestaat waarvoor de tweede verzameling restrikties verkregen wordt.

Na te zijn ingegaan op het geval waar de restrikties expliciet te bepalen zijn, zullen we nu analyseren hoe de situatie bij impliciete formulering is. We willen de invloed van een andere keuze van f_1 en f_2 op de waarde van de Wald-toets in de meest algemene vorm nagaan. Daartoe moeten we de impliciete funkties van f in vier groepen verdelen.

De eerste groep impliciete functies $f_1^*(\beta,\Theta) = 0$, gebruiken we samen met de tweede groep impliciete functies, $f_2^*(\beta,\Theta) = 0$, om bij een gegeven $\hat{\Theta}$ een oplossing $\hat{\beta}_1$ te berekenen. De lezer moet deze formulering van f_1^* en f_2^* niet verwarren met die we in de subparagrafen 3.1 en 3.2 gehanteerd hebben. f_1^* is opgebouwd uit k functies en f_2^* uit m-k functies. De gevonden oplossing $\hat{\beta}_1$ wordt ingevuld in de derde en vierde groep impliciete functies $f_3^*(\beta,\Theta)$ en $f_4^*(\beta,\Theta)$, deze zijn respectievelijk samengesteld uit k en r-k functies.
In onze originele notatie uitgedrukt hebben we dan

$$\begin{aligned} f_1(\beta,\Theta) &= \begin{pmatrix} f_1^*(\beta,\Theta) \\ f_2^*(\beta,\Theta) \end{pmatrix} = 0 \\ f_2(\beta,\Theta) &= \begin{pmatrix} f_3^*(\beta,\Theta) \\ f_4^*(\beta,\Theta) \end{pmatrix} = 0 \ . \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Bij een andere keuze van de impliciete relaties van f_1 en f_2 zullen een aantal impliciete functies in de eerste situatie dienen om een oplossing $\hat{\beta}_1$ te bepalen, terwijl ze in de tweede situatie de rol van de impliciet geformuleerde restrikties vervullen. We veronderstellen dat $f_2^*(\beta,\Theta) = 0$ in beide gevallen dient om een initiële oplossing te berekenen. De oplossing die in het tweede geval berekend wordt noemen we $\hat{\beta}_2$. Uitgedrukt in f_1 en f_2 is de keuze van de groepen impliciete functies in de tweede situatie de volgende

$$\begin{aligned} f_1(\beta,\Theta) &= \begin{pmatrix} f_2^*(\beta,\Theta) \\ f_3^*(\beta,\Theta) \end{pmatrix} = 0 \\ f_2(\beta,\Theta) &= \begin{pmatrix} f_1^*(\beta,\Theta) \\ f_4^*(\beta,\Theta) \end{pmatrix} = 0 \ . \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Ter vereenvoudiging van de afleidingen voeren we de volgende notatie in

$$f_{i+j}^*(\beta,\Theta) = \begin{pmatrix} f_i^*(\beta,\Theta) \\ f_j^*(\beta,\Theta) \end{pmatrix}, \quad i,j = 1, \ldots, 4.$$

Samenvattend:
We onderscheiden twee verschillende keuzen van f_1 en f_2. Bij de eerste keuze gebruiken we $f_{1+2}^*(\beta,\hat{\Theta}) = 0$ om een oplossing $\hat{\beta}_1$ te berekenen die we in $f_{3+4}^*(\beta,\hat{\Theta})$ invullen. Bij de andere keuze bepalen we een $\hat{\beta}_2$ die voldoet aan $f_{2+3}^*(\hat{\beta}_2,\hat{\Theta}) = 0$ en die we in $f_{1+4}^*(\beta,\hat{\Theta})$ invullen.

De eerste orde Taylor-benaderingen van de restrikties die bij beide problemen horen worden gegeven door:

$$0 \approx f^*_{3+4}(\hat\beta_1,\hat\theta) + \left[- \frac{\partial f^*_{3+4}(\beta,\theta)}{\partial\beta'} \left(\frac{\partial f^*_{1+2}(\beta,\theta)}{\partial\beta'}\right)^{-1} \frac{\partial f^*_{1+2}(\beta,\theta)}{\partial\theta'} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f^*_{3+4}(\beta,\theta)}{\partial\theta'}\right] \Bigg|_{(\beta,\theta) = (\hat\beta_1,\hat\theta)} (\theta-\hat\theta) \qquad \text{en} \qquad (3.12)$$

$$0 \approx f^*_{1+4}(\hat\beta_1,\hat\theta) + \left[- \frac{\partial f^*_{1+4}(\beta,\theta)}{\partial\beta'} \left(\frac{\partial f^*_{2+3}(\beta,\theta)}{\partial\beta'}\right)^{-1} \frac{\partial f^*_{2+3}(\beta,\theta)}{\partial\theta'} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f^*_{1+4}(\beta,\theta)}{\partial\theta'}\right] \Bigg|_{(\beta,\theta) = (\hat\beta_2,\hat\theta)} (\theta-\hat\theta) \,. \qquad (3.13)$$

De waarde van de Wald-toets zal gelijk zijn bij beide formuleringen indien er een niet-singuliere matrix A bestaat zodanig dat vermenigvuldiging van de matrix met partiële afgeleiden in (3.12) met A de matrix met partiële afgeleiden in (3.13) oplevert. In het algemeen zal een dergelijke matrix A niet bestaan, maar we zullen aangeven op welke wijze onderzocht kan worden voor welke soort problemen deze A wel bestaat. We zullen proberen een A te vinden waardoor na transformatie de matrices van partiële afgeleiden zeer veel op elkaar lijken. Daartoe patitioneren we

$$\left(\frac{\partial f^*_{2+3}(\beta,\theta)}{\partial\beta}\right)^{-1} \Bigg|_{(\beta,\theta) = (\hat\beta_1,\hat\theta)} \quad \text{in} \quad (B_1 \,\vdots\, B_2) \,, \text{ waar } B_1 \text{ en } B_2$$

respectievelijk matrices van orde $m \times m-k$ en $m \times k$ voorstellen. We stellen A gelijk aan:

$$A = \left[\frac{-\partial f^*_{1+4}(\beta,\theta)}{\partial\beta'} B_2 \,\vdots\, \begin{matrix} 0_{k\ r-k} \\ I_{r-k} \end{matrix} \right] \Bigg|_{(\beta,\theta) = (\hat\beta_1,\hat\theta)} \qquad (3.14)$$

waarbij $0_{k\ r-k}$ de nul-matrix van orde $k \times r-k$ voorstelt.
Na uitvoering van de matrix vermenigvuldiging van A uit (3.14) met de matrix van partiële afgeleiden uit (3.12) vinden we, na gebruikmaking van het feit dat geldt:

$$B_2 \frac{\partial f_3^*(\beta,\Theta)}{\partial \beta'}\Bigg|_{(\beta,\Theta) = (\hat\beta_1,\hat\Theta)} = I_m - B_1 \frac{\partial f_2^*(\beta,\Theta)}{\partial \beta'}\Bigg|_{(\beta,\Theta) = (\hat\beta_1,\hat\Theta)}$$

en enige algebraïsche manipulatie het volgende resultaat

$$\left[-\frac{\partial f_{1+4}^*(\beta,\Theta)}{\partial \beta'}\left(\frac{\partial f_{2+3}^*(\beta,\Theta)}{\partial \beta'}\right)^{-1}\frac{\partial f_{2+3}^*(\beta,\Theta)}{\partial \Theta'} + \frac{\partial f_{1+4}^*(\beta,\Theta)}{\partial \Theta'}\right]_{(\beta,\Theta) = (\hat\beta_1,\hat\Theta)} , \tag{3.15}$$

De term (3.15) is equivalent aan de matrix van partiële afgeleiden in (3.13), behalve dat evaluatie hier plaatsvindt in $(\hat\beta_1,\hat\Theta)$ in plaats van in $(\hat\beta_2,\Theta)$. Als $\hat\beta_1 = \hat\beta_2$, dan zal er geen verschil zijn in de waarde van de Wald-toets, als afgezien wordt van enkele kleine steekproefinvloeden door een verschillende restterm van de Taylor-benadering. Asymptotisch zal er onder H_0 geen verschil zijn indien er slechts één oplossing van $f_1(\beta,\Theta) = 0$ bestaat, omdat asymptotisch $\text{plim}\ (\hat\beta_1 - \hat\beta_2) = 0$, waardoor (3.13) en (3.15) asymptotisch niet te onderscheiden zijn. Bestaan er onder H_0 meerdere oplossingen van $f_1(\beta,\Theta) = 0$, dan is (3.13) niet noodzakelijk asymptotisch equivalent aan (3.15) en is asymptotische equivalentie van de Wald-toets-waarde niet gegarandeerd onder H_0 . Hiervoor verwijzen we naar voorbeeld drie in paragraaf vier. Indien er slechts één oplossing van $f(\beta,\Theta) = 0$ bestaat, dan is de asymptotische equivalentie van de waarde van de Wald-toets verkregen doordat in een omgeving van de oplossing (β,Θ) de impliciete functies onder H_0 zijn te lineariseren tot

$$\frac{\partial f_1(\beta,\Theta)}{\partial \beta'}(\hat\beta - \beta) = -\frac{\partial f_1(\beta,\Theta)}{\partial \Theta'}(\hat\Theta - \Theta)$$

$$\frac{\partial f_2(\beta,\Theta)}{\partial \beta'}(\hat\beta - \beta) = -\frac{\partial f_2(\beta,\Theta)}{\partial \Theta'}(\hat\Theta - \Theta) \quad .$$

Tenslotte merken we op dat voor een stelsel lineaire impliciete functies $R_1\beta = R_2\Theta$, met R_1 en R_2 constante matrices, zoals onder andere bij polynoom verdeelde vertragingen het geval is, altijd dezelfde waarde van de toetsingsgrootheid verkregen wordt, hetgeen eenvoudig met behulp van de in (3.14) aangegeven keuze voor A in het algemeen aangetoond kan worden.

In de voorbeelden van paragraaf vier zullen we nagaan of de keuze van f_1 en f_2 en eventueel het bestaan van meerdere oplossingen van $f_1(\beta,\hat{\theta}) = 0$ de waarde van de toetsingsgrootheid beïnvloeden.

4. Toepassingen

In deze paragraaf zullen we een drietal voorbeelden geven om de methoden uit paragraaf drie te illustreren. Ons eerste voorbeeld handelt over het toetsen van overidentificerende restrikties in een lineair simultaan model. Deze toets is gepresenteerd door Byron (1974). We zullen aangeven hoe $h(\hat{\Theta})$ en $\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}$ worden bepaald en zullen verder ingaan op de invloed van verschillende formuleringen van de restrikties.
In ons tweede voorbeeld zullen we een expliciete afleiding geven van de restrikties, die voortvloeien uit het toetsen van de 'Rational Expectation Hypothesis' in een herleide vorm model. De afleiding zoals wij die geven is algemener dan die van Hoffman en Schmidt (1981).
Het derde en laatste voorbeeld is gebaseerd op de problematiek van het toetsen van de aanwezigheid van een 'common factor' in een dynamisch model.

4.1 Overidentificerende restrikties in een lineair simultaan model

Onder anderen, Liu (1960) en Sims (1980), hebben beweerd dat de parameters in de meeste economische modellen ondergeïdentificeerd zijn, terwijl veel econometrische technieken op identificatie gebaseerd zijn. Gezien deze mogelijke controverse is het interessant na te gaan of Byron's-toets op overidentificatie vaak tot verwerping van de nulhypothese leidt. Hausman (1971) geeft echter aan dat Byron's-toets niet geregeld gebruikt wordt. Door te laten zien dat deze toets een bijzonder geval van een zeer algemene procedure is, kunnen we mogelijk een groter gebruik van de toets stimuleren.

We formuleren het simultane model in de structuur- en herleide vorm als volgt:

$$\underset{T\times g}{Y}\ \underset{g\times g}{\Gamma} + \underset{T\times K}{X}\ \underset{K\times g}{\Delta} = U \quad \text{en} \tag{4.1}$$

$$Y = -X\,\Delta\,\Gamma^{-1} + U\,\Gamma^{-1} = X\,\Pi + V \tag{4.2}$$

Voor het gehele systeem moet gelden dat $\Pi\Gamma + \Delta = 0$, of voor een enkele vergelijking, zeg de eerste,

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \pi_{21} & \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad (4.3)$$

waarbij γ_1 en δ_1 respectievelijk de parameters zijn behorend bij de in de eerste vergelijking opgenomen endogene variabelen, met uitzondering van de genormaliseerde, van orde $g_1 - 1$, en de K_1 opgenomen gepredetermineerde variabelen. De matrices π_{11}, Π_{11}, Π_{12}, π_{21}, Π_{21} en Π_{22} zijn respectievelijk van orde $K_1 \times 1$, $K_1 \times (g_1-1)$, $K_1 \times (g-g_1)$, $(K-K_1)\times 1$, $(K-K_1)\times(g_1-1)$ en $(K-K_1)\times(g-g_1)$.

De impliciete functies in (4.3) geven de relaties die in geval van een juiste nulhypothese tussen de parameters van het model onder de nul- en de alternatieve hypothese moeten gelden, d.w.z. $f(\beta,\Theta) = 0$.
Θ bestaat uit de herleide vorm parameters en β' uit $(\gamma_1', \delta_1')'$. Om de Wald-toets te berekenen, zonder dat we tot expliciete formulering van de restrikties overgaan, moeten we eerst $h(\hat{\Theta})$ bepalen. We kiezen daartoe een geschikte $f(\beta,\hat{\Theta}) = 0$, bijvoorbeeld de eerste $K_1 + g_1 - 1$ rijen uit (4.3). Om de notatie in de komende afleiding te vereenvoudigen, voeren we in dat:

$$(\pi_{21} \quad \Pi_{21}) = \begin{bmatrix} \bar{\pi}_{21} & \bar{\Pi}_{21} \\ \underline{\pi}_{21} & \underline{\Pi}_{21} \end{bmatrix} , \quad \text{waarbij } \bar{\pi}_{21},\ \bar{\Pi}_{21},\ \underline{\pi}_{21} \text{ en } \underline{\Pi}_{21}$$

respectievelijk van orde $(g_1-1)\times 1$, $(g_1-1)\times(g_1-1)$, $(K-K_1-g_1+1)\times 1$ en $(K-K_1-g_1+1)\times(g_1-1)$ zijn. De oplossing die we voor β uit de eerste K_1+g_1-1 rijen van (4.3) berekenen, wordt gegeven door:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\delta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{21}^{-1} \bar{\pi}_{21} \\ -\Pi_{11} \bar{\Pi}_{21}^{-1} \bar{\pi}_{21} + \pi_{11} \end{bmatrix} . \qquad (4.4)$$

Deze oplossing substitueren we in de $K-K_1-g_1+1$ overblijvende rijen van (4.3), waardoor we $h(\hat{\Theta})$ bepaald hebben.

$$h(\hat{\Theta}) = f_2(\hat{\beta},\hat{\Theta}) = \underline{\Pi}_{21} \bar{\Pi}_{21}^{-1} \bar{\pi}_{21} - \underline{\pi}_{21} \qquad (4.5)$$

Door nu met formules voor afgeleiden van matrices van Neudecker (1969) te werken, kan $\left.\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta \hat{\Theta}}$ uit (4.5) bepaald worden. We zullen deze lijn echter om reden van de illustratie niet volgen, maar de onderdelen voor bepaling van (3.6) afleiden. Als laatste stap om de Wald-toets te berekenen moeten de matrix van partiële afgeleiden naar de restrikties bepaald worden; in dit geval is dat:

$$\left.\frac{\partial\, h\,(\Theta)}{\partial\ \Theta'}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} = \left.\frac{\partial\, h\,(\Pi)}{\partial\ \mathrm{vec}'(\Pi)}\right|_{\Pi=\hat{\Pi}} \quad . \qquad (4.6)$$

De onderdelen waar (3.6) uit bestaat zijn in deze situatie:

$$\frac{\partial\ f_2(\beta,\Theta)}{\partial\beta'} = (\underline{\Pi}_{21} \quad 0_{(K-K_1-g_1+1)K_1})$$

$$\frac{\partial\ f_1(\beta,\Theta)}{\partial\beta'} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{K_1} \\ \bar{\Pi}_{21} & 0_{(g_1-1)(g_1-1)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\ f_1(\beta,\Theta)}{\partial\Theta'} = \left([-1 \quad \gamma_1' \quad 0_{1(g-g_1)}] \otimes [I_{K_1+g_1-1} \quad 0_{(K_1+g_1-1)(K-K_1-g_1+1)}]\right)$$

$$\frac{\partial\ f_2(\beta,\Theta)}{\partial\Theta'} = \left([-1 \quad \gamma_1' \quad 0_{1(g-g_1)}] \otimes [0_{(K-K_1-g_1+1)(K_1+g_1-1)} \quad I_{K-K_1-g_1+1}]\right)$$

waarbij $A \otimes B = [a_{ij}\ \ B]$.

Na substitutie van deze onderdelen in 3.6 en uitwerken van de dan verkregen expressie verkrijgen we dat de matrix van partiële afgeleiden van de restrikties naar $\mathrm{vec}'(\Pi)$ gelijk is aan:

$$[-1 \ \gamma_1' \ 0_{1(g-g_1)}] \otimes [0_{(K-K_1-g_1+1)K_1} - \underline{\Pi}_{21}\ \bar{\Pi}_{21}^{-1} \quad I_{K-K_1-g_1+1}] \quad . \qquad (4.7)$$

Deze expressie moet bij de berekening van de Wald-toets in $\hat{\Pi}$ en $\hat{\gamma}_1$, welke in (4.4) wordt gegeven, worden geëvalueerd. Het valt na te gaan dat de gegeven matrix van partiële afgeleiden equivalent is aan die van Byron (1974). Voor een gegeven oplossing voor de structuurparameters kunnen eenvoudig extra restrikties getoetst worden door het aantal impliciete functies in f_2 uit te breiden. Hierbij kunnen we de in paragraaf 2 geschetste sequentiële toetsingsprocedures gebruiken.
De restrikties voor het toetsen op overidentificatie zijn in (4.5) gegeven. De waarde van de Wald-toets zal bij een andere toegestane keuze van f_1 en f_2 niet veranderen, indien er een niet-singuliere matrix A bestaat, zodanig dat de originele restrikties nu voorvermenigvuldiging met deze matrix A overgaan in de restrikties die ontstaan door een andere keuze van f_1 en f_2 .

Met behulp van de in (3.14) gegeven formulering van A kan aangetoond worden dat de keuze van f_1 en f_2 voor dit type probleem asymptotisch niet van invloed is. Het betreft namelijk een transformatie van het type $g(h(\Theta),\Theta) = A(\Theta)\,h(\Theta)$ en hiervan is in paragraaf 2 aangetoond, dat de waarde van de Wald-toets asymptotisch equivalent is voor beide formuleringen van de restrikties. De asymptotische equivalentie van de Wald-toets bij een verschillende keuze van f_1 en f_2 volgt ook uit het gestelde in paragraaf 3.3, omdat er onder H_0 slechts één β is, waarvoor geldt dat $f(\beta,\Theta) = 0$.

4.2 Toetsen op rationele verwachtingen in een herleide vorm model

Tegenwoordig wordt veel aandacht besteed aan de econometrische implicaties van rationele verwachtingen. We verwijzen naar Wallis (1980), Revankar (1980) en Hoffman en Schmidt (1981). In empirische toepassingen is van belang of de 'Rational Expectation Hypothesis' al dan niet verworpen moet worden. We zullen in deze subparagraaf expliciet de restrikties afleiden voor het toetsen op de REH.

We volgen de lijnen van Hoffman en Schmidt en geven een algemene formulering van de restrikties in een herleide vorm model, waarin vertraagde exogenen en verwachtingen voor één periode voorkomen. We veronderstellen dat de exogene variabelen door een vector autoregressief proces kunnen worden gemodelleerd. Door de rationele verwachtingen komen mogelijk vertraagde exogenen in het model voor, die in eerste instantie niet in het model voorkwamen. Hetgeen door het autoregressieve x-proces wordt veroorzaakt.

We beschouwen een simultaan model waarin de rationele verwachtingen gevormd worden op basis van alle informatie die tot tijdstip $t-1$ bekend is. Het herleide vorm model heeft dan de volgende vorm:

$$y_t = \sum_{i=0}^{p} x_{t-i}\,\Pi_i + {}_{t-1}E\, y_t \psi + \varepsilon_t \qquad (4.8)$$

$$x_t = \sum_{i=1}^{q} x_{t-i}\,\Gamma_i + u_t \quad , \qquad (4.9)$$

waarbij y_t een rijvector van g endogene variabelen, x_t een rijvector van k exogenen en ${}_{t-1}E\, y_t$ een rijvector van de g verwachtingsvariabelen is. De vectoren van storingstermen hebben verwachting nul en eindige variantie-covariantie matrices en zijn verder ongecorreleerd.

Op de herleide vorm matrices Π_i , $i=1,\ldots,p$ en ψ kunnen nul-restrikties opgelegd zijn. De grootste vertraging van een exogene in (4.8) is p .

De orde van het autoregressieve systeem is q , de bijbehorende coëfficiëntmatrices worden gegeven door Γ_i , $i=1\ldots q$. Door in (4.8) verwachtingen conditioneel op de informatie die tot en met tijdstip $t-1$ bekend is te nemen krijgen we

$$_{t-1}E_1 y_t = {}_{t-1}E_1 x_t \Pi_0 (I-\psi)^{-1} + \sum_{i=1}^{p} x_{t-i} \Pi_i (I-\psi)^{-1}, \tag{4.10}$$

en $_{t-1}E_1 x_t$ is gelijk aan

$$_{t-1}E_1 x_t = \sum_{i=1}^{q} x_{t-i} \Gamma_i \quad . \tag{4.11}$$

Na substitutie van (4.11) en van (4.10) in (4.8) krijgen we

$$\begin{aligned} y_t &= x_t\Pi_0 + \sum_{i=1}^{p} x_{t-i} \Pi_i (I + (I-\psi)^{-1}\psi) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q} x_{t-i} \Gamma_i \Pi_0 (I-\psi)^{-1}\psi + \varepsilon_t \ , \end{aligned} \tag{4.12}$$

hetgeen ook wel de waargenomen herleide vorm wordt genoemd.
We noemen $s = \max(p,q)$ en introduceren $\Pi_{p+1}\ldots\Pi_s$ of $\Gamma_{p+1}\ldots\Gamma_s$, welke we a priori nul stellen.
Het model in (4.12) is genest in

$$y_t = \sum_{i=0}^{s} x_{t-1} A_i + V_t \tag{4.13}$$

Voor het toetsen van het niet gerestrikteerde model in (4.13) tegen dat in (4.12) kunnen we de volgende impliciete relaties tussen de parameters $\Theta = (A_i, i=0\ldots s, \Gamma_i, i=1\ldots q)$ en $\beta = (\Pi_i, i=0\ldots p, \psi, \Gamma_i, i=1\ldots q)$ van de respectievelijke modellen opstellen:

$$\begin{aligned} A_0 &= \Pi_0 \\ A_i &= \Pi_i (I + (I-\psi)^{-1}\psi) + \Gamma_i \Pi_0 (I-\psi)^{-1}\psi \ , \ i=1\ldots s \\ \Gamma_i &= \Gamma_i \ . \end{aligned} \tag{4.14}$$

De impliciete functies zijn in matrixnotatie geschreven, dit vormt echter geen beperking. Een oplossing voor Π_0 en Γ_i volgt direct uit (4.14) af te leiden. Voor een gegeven ψ kan ook eenvoudig een oplossing voor Π_i berekend worden. De restrikties volgen dan uit die impliciete relaties waarvoor geldt dat de vertraagde variabele x_t met een nul restriktie in (4.8) voorkomt, maar niet met een nul restriktie in het vector proces (4.9). Laat C de samenstelling van de A_i zijn die aan de bovengenoemde voorwaarde voldoen en laat Γ de bijbehorende matrix van de Γ_i zijn, dan moeten de restrikties afgeleid worden uit

$$C = \Gamma\Pi_0(I-\psi)^{-1}\psi \qquad (4.15)$$

Wil onze methode voor het expliciet afleiden van de restrikties toepasbaar zijn, dan moet rang $(\Gamma\Pi_0) = g$ zijn. We kiezen dan een aantal impliciete functies uit (4.15) om een oplossing voor ψ te berekenen en substitueren deze in de resterende impliciete functies om de restrikties te bepalen.
Hoffman en Schmidt (1981) geven een formule waaruit het aantal restrikties te bepalen is, ook voor de situatie waarin rang $(\Gamma\Pi_0) < g$.
Onze methode kan dan niet meer op numerieke wijze toegepast worden, omdat geen oplossing voor ψ verkregen kan worden. Na herparametisering is toepassing wel mogelijk. Evenals in voorbeeld 4.1 is er bij het toetsen op de 'Rational Expertation Hypothesis' in een herleide vorm model onder H_0 slechts sprake van één β zodanig dat $f(\beta,\theta) = 0$, waaruit de asymptotische equivalentie van een verschillende keuze van f_1 en f_2 volgt.

4.3 'Common factor' restrikties

Een ander voorbeeld dat goed met behulp van de in paragraaf drie geschetste methoden opgelost kan worden is het toetsen op de aanwezigheid van een 'common factor' in een dynamisch model. Door Sargan (1980a) is voor een één vergelijking model een toets op basis van een 'determinental equation' voorgesteld. In Sargan (1977) wordt aangegeven hoe de methode voor een simultaan model toegepast kan worden. Mizon en Hendry (1980) geven een toepassing van de methode van Sargan.
Wij zullen laten zien dat het toetsen op 'common factors' ook met de algemene procedures uit paragraaf 3 behandeld kan worden en we zullen aan de hand van een voorbeeld ingaan op niet unieke representatie van de restrikties. De bedoeling van de 'common factor'-aanpak is te komen tot een 'parsimonious' beschrijving van het datagenererende proces.
De algemene specificatie van het model is als volgt:

$$\phi_0(L)y_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i(L)x_{it} + u_t \qquad (4.16)$$

$$\varphi(L)\,u_t = \varepsilon_t$$

met $\varepsilon_t \overset{d}{=} N(0,\sigma^2)$. Omwille van de eenvoud hebben we afgezien van 'moving average' elementen in de storingsterm ε_t . $\phi_i(L)$ zijn voor $i=0...k$ polynomen in de vertragingsoperator, L , van orde r_i , $i=1...k$, met k het aantal exogene variabelen in de vergelijking. Ook $\varphi(L)$ geeft een polynoom in de vertragingsoperator aan van orde p . De specificatie kan geschreven worden als

$$\varphi(L)\ \phi_0(L)\ y_t = \sum_{i=1}^{k} \varphi(L)\ \phi_i(L)\ x_{it} + \varepsilon_t \tag{4.17}$$

Als we afzien van de restrikties in (4.17) dan krijgen we

$$\beta_0(L)\ y_t = \sum_{i=1}^{k} \beta_i(L)\ x_{it} + v_t \quad . \tag{4.18}$$

Met $\beta_i(L)$ polynomen in de vertragingsoperator van orde r_i+p .

Het aantal parameters in (4.17) bedraagt $\sum_{i=0}^{k} r_i+p$, terwijl dat aantal in (4.18) $\sum_{i=0}^{k} (r_i+p)$ bedraagt. Het toetsen van (4.17) tegen (4.18) impliceert dan ook pk restrikties. De procedure om de Wald-toets te berekenen is eenvoudig. Schat de parameters van (4.18) met OLS . De impliciete functies die onder de nulhypothese tussen de parameters van $\varphi(L)\phi_i(L)$ en $\beta_i(L)$ voor $i=0...k$ moeten gelden, volgen door uitschrijven van (4.17) en gelijkstellen met de coëfficiënten in (4.18). Kies vervolgens een f_1 en een f_2 uit deze impliciete relaties zodanig dat er bij een gegeven waarde voor de parameters onder H_1 een oplossing voor de parameters onder H_0 bestaat.
Verder geldt dat f_1 en f_2 continu differentieerbaar zijn, zodat gebruik van de impliciete functieregel toegestaan is. De Wald-toets kan nu eenvoudig langs numerieke of analytische weg via de formules (3.8) en (3.9) worden bepaald. De structuur van de impliciete functies voldoet immers aan $f(\beta) - \Theta = 0$.
Aan de hand van enkele voorbeelden willen we nagaan of de waarde van de Wald-toets beïnvloed wordt bij verschillende keuzes van f_1 en f_2 .
We beschouwen de volgende dynamische specificatie

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_1 y_{t-1} + \gamma_0 x_{1t} + \delta_0 x_{2t} + c + u_t \\ \text{en} \qquad u_t &= \varphi u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{met} \quad \varepsilon_t \overset{d}{=} N(0,\sigma^2) \ . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Dit model willen we toetsen tegen het model waar de 'common factor' restriktie niet is opgelegd.

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \beta_3 x_{1t} + \beta_4 x_{1t-1} + \beta_5 x_{2t} + \beta_6 x_{2t-1} + \beta_7 + v_t \ . \tag{4.20}$$

Onder de nulhypothese gelden dan de volgende impliciete relaties tussen de parameters uit (4.19) en (4.20).

$$\begin{aligned}
\varphi + \alpha_1 - \beta_1 &= 0 \\
-\varphi\alpha_1 - \beta_2 &= 0 \\
\gamma_0 - \beta_3 &= 0 \\
-\varphi\gamma_0 - \beta_4 &= 0 \\
\delta_0 - \beta_5 &= 0 \\
-\varphi\gamma_0 - \beta_6 &= 0 \\
c-\varphi c - \beta_7 &= 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

We doen twee verschillende keuzes voor f_2 . In de eerste situatie kiezen we de tweede en de vierde relatie uit (4.21), in de tweede situatie kiezen we de tweede en de zesde relatie. Hieruit kunnen we de volgende twee groepen van twee restrikties afleiden:

$$\frac{\beta_4}{\beta_3}\left(\beta_1 + \frac{\beta_4}{\beta_3}\right) - \beta_2 = 0$$

$$\beta_5 \frac{\beta_4}{\beta_3} - \beta_6 = 0$$

en

$$\frac{\beta_6}{\beta_5}\left(\beta_1 + \frac{\beta_6}{\beta_5}\right) - \beta_2 = 0$$

$$\beta_3 \frac{\beta_6}{\beta_5} - \beta_4 = 0 \; .$$

Uit de tweede restriktie volgt dat onder de nulhypothese geldt $\beta_4 \,/\, \beta_3 = \beta_6 \,/\, \beta_5$, waardoor de twee groepen restrikties equivalent aan elkaar zijn. De waarde van de Wald-toets wordt in kleine steekproeven echter beïnvloed door de formulering die gebruikt wordt, zodat hier een arbitrair element bij de toetsing is betrokken.
In paragraaf 3 hebben we opgemerkt dat de waarde van de toetsingsgrootheid kan worden beïnvloed indien er meerdere oplossingen van het stelsel f_1 bestaan. Deze problematiek doet zich voor bij het toetsen van model (4.19), we zullen echter aan de hand van een iets ander voorbeeld hier dieper op ingaan. Juist bij de 'common factor' benadering doet de mogelijkheid van meerdere oplossingen zich vaak voor. Mizon en Hendry (1980) proberen de restrikties zodanig te formuleren dat deze moeilijkheid voorkomen wordt. We zullen echter aan de hand van het door hun gegeven

voorbeeld aangeven dat ook hier niet alle arbitraire aspecten zijn voorkomen. Ze bespreken een voorbeeld dat is gebaseerd op de volgende twee dynamische vergelijkingen, waarbij de eerste genest is in de tweede:

$$y_t = (\varphi + \alpha)\, y_{t-1} - \varphi\alpha\, y_{t-2} + \gamma_0 x_t + (\gamma_1 - \varphi\gamma_0)\, x_{t-1} - \varphi\gamma_1 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

en

$$y_t = \beta_0 y_{t-1} + \beta_1 y_{t-2} + \beta_2 x_t + \beta_3 x_{t-1} + \beta_4 x_{t-2} + u_t \ .$$

De relaties tussen de parameters onder H_0 , $(\varphi\ ,\ \alpha\ ,\ \gamma_0\ ,\ \gamma_1)$, en onder H_1 , $(\beta_i\ ,\ i=0,\ldots,4)$, voldoen aan de structuur $f(\beta) - \Theta = 0$ en geven onder de nulhypothese aanleiding tot één restriktie. We verdelen de impliciete functies als volgt tussen f_1 en f_2 .

$$\begin{array}{lllll} f_1 & : & \varphi + \alpha - \beta_0 & = & 0 \\ & & -\varphi\alpha - \beta_1 & = & 0 \\ & & \gamma_0 - \beta_2 & = & 0 \\ & & \gamma_1 - \varphi\gamma_0 - \beta_3 & = & 0 \\ & & & & \\ f_2 & : & -\varphi\gamma_1 - \beta_4 & = & 0 \end{array} \qquad (4.22)$$

Als $\hat\beta_0^2 + 4\hat\beta_1 > 0$, dan heeft het stelsel 2 oplossingen. Substitutie van deze oplossingen in f_2 maakt duidelijk dat in het algemeen niet dezelfde waarde voor de Wald-toets verkregen zal worden voor beide oplossingen. De vraag blijft dan bij welke oplossing de toetsingsgrootheid berekend moet worden. De stationairiteitseis $|\hat\varphi| < 1$ kan enige hulp bieden indien er slechts één oplossing is die hieraan voldoet, maar ook deze eis leidt niet altijd tot een keuze uit de oplossingen.

Als we $\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}$ in $\hat\Theta$ uitrekenen, dan vinden we met behulp van formule (3.9):

$$\left.\frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta'}\right|_{\Theta=\hat\Theta} = \left(\frac{\gamma_1\varphi + \gamma_0\varphi^2}{\alpha-\varphi}\ ,\ \frac{\gamma_1 + \gamma_0\varphi}{\alpha-\varphi}\ ,\ -\varphi^2\ ,\ -\varphi\ ,\ -1\right)_{\beta=\hat\beta_1} ,$$

waarbij $\hat\beta_1$ een oplossing is van $f_1(\beta,\hat\theta) = 0$ uit (4.22).
Als $\hat\beta_0^2 + 4\hat\beta_1 > 0$, dan bestaan er meerdere oplossingen en zal de matrix van partiële afgeleiden niet gelijk zijn bij evaluatie in beide oplossingen. Ook asymptotisch behoeven we onder H_0 niet dezelfde toetswaarde te krijgen omdat er twee verschillende oplossingen van $f(\beta,\Theta) = 0$, onder H_0 kunnen bestaan.

We zullen echter laten zien dat men ook met een arbitrairiteit geconfronteerd wordt indien we de restriktie analytisch op willen schrijven, waarbij we niet tussen twee wortels voor φ moeten kiezen. Mizon en Hendry (1980) geven aan dat het niet eenvoudig is om de restriktie uit (4.22) te bepalen. Zij vinden:

$$\beta_4 + \hat{\varphi}\beta_3 + \hat{\varphi}^2\beta_2 = 0 \quad \text{met} \quad \hat{\varphi} = \frac{(\beta_0\beta_4 - \beta_1\beta_3)}{(\beta_1\beta_2 + \beta_4)} \qquad (4.23)$$

Door substitutie van de impliciete relaties uit (4.22) kan direct nagegaan worden dat aan deze restriktie voldaan moet zijn. De restriktie zoals door Mizon en Hendry (1980) is geschetst is echter niet uniek, omdat na enig rekenwerk blijkt dat ook

$$\beta_4 + \hat{\varphi}\beta_3 + \hat{\varphi}^2\beta_2 = 0 \quad \text{met} \quad \hat{\varphi} = \frac{-\beta_1\beta_2 - \beta_4}{\beta_0\beta_2 + \beta_3} \qquad (4.24)$$

als restriktie uit de impliciete relaties in (4.22) naar voren komt.

Uit bovenstaande opmerkingen blijkt dat men de moeilijkheden om de Wald-toets te berekenen, nl. niet-singuliere niet-lineaire transformaties en meerdere keuzemogelijkheden en de restrikties te bepalen, zowel bij uitwerking langs analytische- als langs numerieke weg tegen komt. Dit kan dan ook geen argument zijn om de in paragraaf 3 geschetste methoden niet zeer algemeen te gebruiken.
Met de in paragraaf 4 geschetste toepassingen hopen we duidelijk gemaakt te hebben dat onze benadering het mogelijk maakt om de Wald-toets op een groot aantal gebieden flexibel toe te passen en van belang kan zijn bij de specificatie van econometrische modellen.

5. Samenvatting

In dit artikel hebben we aangegeven hoe de relaties die tussen de parameters onder H_0 en H_1 moeten bestaan gebruikt worden om de restrikties expliciet te bepalen of hoe de Wald-toets berekend kan worden door slechts op impliciete wijze van deze restrikties gebruik te maken. Vooral deze laatste procedure biedt de mogelijkheid om de toets voor zeer algemene problemen te programmeren en het vaak tijdrovende aspect van het bepalen van de restrikties te voorkomen. We zijn ook een aantal situaties nagegaan waarin transformatie van de restrikties, al dan niet tot een verandering kan leiden. In de voorbeelden van paragraaf 4 hebben we met behulp van enkele toepassingen de in de paragrafen 2 en 3 verkregen resultaten geïllustreerd.
Binnenkort zal door de auteur een zeer algemeen Fortranprogramma voor de geschetste procedure beschikbaar gesteld worden.

Literatuur

Almon, S., 1965, 'The distributed lag between capital appropriations and expenditures', Econometrica, vol. 30, p. 178-196.

Anderson, T.W., The statistical analysis of time series, New York, John Wiley and Sons, 1971.

Byron, R.P., 1974, 'Testing structural specification using the unrestricted reduced form', Econometrica, vol. , p. 869-883.

Hausman, J.A., 1978, 'Specification tests in econometrics', Econometrica, vol. 46, p. 1251-1272.

Hoffman, D.L., and Schmidt, P., 1981 , 'Testing the restrictions implied by the rational expectation hypothesis', Journal of econometrics, p. 265-287.

Liu, T., 1960, Under identification, structural estimation and forecasting, Econometrica, vol. 28, p. 855-865.

Mizon, G.E., 1977 , 'Model selection procedures', in Artis, G.J. and Nobay, A.R. (eds.): Studies in modern economic analysis, Oxford, Basil Blackwell.

Mizon, G.E. and Hendry, D.F., 1980 , 'An empirical application and monte carlo analysis of tests of dynamic specification', The review of economic studies, vol. 47, p. 21-46.

Neudecker, H., 1969 , 'Some theories on matrix differentiation with special reference to Kronecker Matrix products', J.A.S.A., vol. 64, p. 953-963.

Revankar, N.S., 1980 , 'Testing of the rational expectations hypothesis', Econometrica, vol. 48, p. 1347-1364.

Rudin, W., 1976 , Principles of mathematical analysis, third edition, Tokyo, McGraw-Hill.

Sargan, J.D., 1977 , Dynamic specification for models with autoregressive errors. Vector autoregressive case, Discussion paper, London School of Economics.

Sargan, J.D., 1980a , Some tests of dynamic specification for a single equation, Econometrica, vol. 48, p. 879-898.

Sargan, J.D. 1980b , The consumer price equation in the past war British economy: An exercise in equation specification testing', The review of economic studies, vol. 47, p. 113-136.

Silvey, S.D., 1970 , Statistical inference, London, Penguin.

Sims, C.A., 1980 , 'Macro economics and reality', Econometrica, vol. 48, p. 1-48.

Wald, A., 1943 , 'Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large', Transactions of the American Mathematical society, vol. 54, p. 426-482.

Wallis, K.F., 1980 , 'Econometric implications of the rational expectation hypothesis', Econometrica, vol. 48, p. 49-74.

DK/mt
82101

Serie Research Memoranda:

1979-1	A.A. Schreuder-Sunderman, Frans Blommaert en Hein Schreuder,	Werknemers en Soc. Jaarverslag.
1979-2	H. Schreuder,	De maatschappelijke verantwoordelijkheid van Ondernemingen.
1979-3	P. Nijkamp en P. Rietveld,	Multilevel Multi-objective Models in a Multiregional System.
1979-4	J. Arntzen, G. Bornmalm-Jardelöw and P. Nijkamp,	Duality, Segmentation and Dynamics on a Regional Labour Market.
1979-5	P. Nijkamp, A. Soffer	Soft Multicriteria Decision Models for Urban Renewal Plans.
1979-6	drs. A.J. Mathot	A Model of choosing a car with or without a credit.
1979-7	H. Blommestein, P. Nijkamp en W. van Veenendaal,	Shopping Perceptions and preferences: A multi-dimensional Attractivenerss Analysis of Consumer and Entrepreneurial Attitudes.
1979-8	H.J.Blommestein and F.C. Palm	The Aggregate Demand for Money in the Netherlands-a new look at a study of the Bank of the Netherlands.
1980-1 Jan.	P. Nijkamp and H. Voogd	New Multicriteria Methods for Physical Planning by Means of Multidimensional Scaling Techniques.
1980-2	Hidde P. Smit	Medium- and Long-Term Models for the Escap-Region - A review of existing models and a proposal for a new model system -
1980-3 april	P.v. Dijck en H. Verbruggen	Productive Employment in Developing Countries' Exporting Industries
1980-4	P. Nijkamp en L. Hordijk	Integrated Approaches to Regional Development Models; A survey of some Western European Models
1980-5	P. Nijkamp	Soft Econometric Models. An analysis of Regional Income Determinants
1980-6	P. Nijkamp en F. van Dijk	Analysis of Conflicts in Dynamical Environmental Systems via Catastrophe Theory.
1980-7 juni	E. Vogelvang	A short term econometric model for the consumer demand of roasted coffee in the Netherlands
1980-8	N. van Hulst	De effectiviteit van de geleide loonpolitiek in Nederland.
1980-9 Oct. 1980	P. Nijkamp	A survey of Dutch integrated Energy-Environmental-Economic Policy Models
1980-10 Oct. 1980	P. Nijkamp	Perspectives for Urban analyses and policies
1980-11 Oct. 1980	P. Nijkamp	New developments in multidimensional geographical data and policy analysis
1980-12	F.C. Palm, E. Vogelvang en D.A. Kodde	Efficient Estimation of the Geometric Distributed Lag Model; Some Monte Carlo Results on Small Sample Properties